DOI: 10.32999/ksu2307-8030/2020-37-18

УДК 519.863:658.15(477)

Шевченко О.К.
кандидат технічних наук,
доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів
Харківського національного економічного університету
імені Семена Кузнеця
E-mail: akshev19@gmail.com

Жуков А.В.
кандидат економічних наук,
доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів
Харківського національного економічного університету
імені Семена Кузнеця
E-mail: okydoky87@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7420-4223

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСОМ ПЕРЕВЕЗЕННЯ МАТЕРІАЛІВ

Узагальнено теоретичні аспекти методу динамічного програмування як математичного методу для прийняття управлінських рішень у задачах оптимізації. Побудовано багатоетапний процес управління на основі принципу оптимальності Беллмана в реальному економічному просторі. Детально розглянуто функціональні рівняння Беллмана, що безпосередньо адаптовані до конкретної виробничої задачі. Отримано оптимальну економіко-математичну модель розвитку економічного процесу. Це дає змогу управляти економічним процесом у цілому, розробляти дієві управлінські рішення, завдяки яким підвищити конкурентоспроможність підприємства. Розроблено алгоритм перевезення та зберігання матеріалів, який складається з прямого ходу, процесу послідовного обчислення функції цілі та зворотного, тобто відновлення оптимального рішення. На останньому кроці прямого ходу отримуємо оптимальне значення останньої змінної $x_n^* = x_n(Y)$ і оптимальні значення змінних управління. Економічний процес управління розподіленням матеріалів розбито на n етапів, рішення прийнято послідовно на кожному етапі, тобто отримано багатокроковий процес. Обчислений показник ефективності цієї керованої системи – функція цілі, яка залежить від початкового стану і управління $\bar{X}(x_1, x_2, \dots x_n)$. Побудовано функціональні рівняння, які пристосовані до задачі розподілення матеріалів. Під час прямого ходу на кожному кроці за функціональними рівняннями обчислено всі можливі значення функції цілі. Кожне наступне значення функції цілі залежить від управління на даному етапі та попереднього значення функції цілі. У такий спосіб за допомогою комп'ютера побудовано таблицю можливих умовно-оптимальних значень функції цілі та відповідних оптимальних управлінь. На кінцевому етапі зворотного ходу отримано оптимальне значення функції цілі та останнє оптимальне управління процесом. На попередньому етапі залежно від оптимального управління процесом на кінцевому етапі знайдено умовно-оптимальне значення функції цілі та попереднє оптимальне управління процесом, потім у такий самий спосіб отримано наступне попереднє рішення. За результатами прямого та зворотного ходів алгоритму отримано оптимальну економіко-математичну модель розподілення матеріалів.

Ключові слова: метод динамічного програмування, функціональні рівняння, економіко-математична модель, оптимальне управління, розподілення матеріалів, прямий хід алгоритму, зворотний хід алгоритму, функція цілі.

Шевченко А.К., Жуков А.В. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ПЕРЕВОЗКИ МАТЕРИАЛОВ

Обобщены теоретические аспекты метода динамического программирования как математического метода для принятия управленческих решений в задачах оптимизации. Построен многоэтапный процесс управления на основе принципа оптимальности Беллмана в реальном экономическом пространстве. Подробно рассмотрены функциональные уравнения Беллмана, непосредственно адаптированные к конкретной производственной задаче. Получена оптимальная экономико-математическая модель развития экономического процесса. Это позволяет управлять экономическим процессом в целом, разрабатывать действенные управленческие решения, благодаря которым повысится конкурентоспособность предприятия. Разработан алгоритм перевозки и хранения материалов, состоящий из прямого хода, процесса последовательного вычисления функции цели и обратного, то есть восстановление оптимального решения. На последнем шаге прямого хода получаем оптимальное значение последней переменной $x_n^* = x_n(Y)$ и оптимальные значения переменных управления. Экономический процесс управления распределением материалов разбит на n этапов, решение принято последовательно на каждом этапе, то есть получен многошаговый процесс. Вычислен показатель эффективности этой управляемой системы – функция цели, которая зависит от исходного состояния и управления $\bar{X}(x_1, x_2, \dots x_n)$. Построены функциональные уравнения, которые приспособлены к задаче распределения материалов. Во время прямого хода на каждом шагу по функциональным уравнениям вычислены все возможные значения функции цели. Каждое последующее значение функции цели зависит от управления на данном этапе и предыдущего значения функции цели. Таким образом с помощью компьютера построена таблица возможных условно-оптимальных значений функции цели и соответствующих оптимальных управлений. На конечном этапе обратного хода получено оптимальное значение функции цели и последнее оптимальное управление процессом. На предварительном этапе в зависимости от оптимального управления процессом на конечном этапе найдены условно оптимальное значение функции цели и предварительное оптимальное управление процессом, затем таким же образом получено следующее предварительное решение. По результатам прямого и обратного ходов алгоритма получена оптимальная экономико-математическая модель распределения материалов.

Ключевые слова: метод динамического программирования, функциональные уравнения, экономико-математическая модель, оптимальное управление, распределение материалов, прямой ход алгоритма, обратный ход алгоритма, функция цели.

Shevchenko Oleksandra, Zhukov Andrii. THE MATHEMATICAL MODEL OF PROCESS MANAGEMENT OF MATERIALS TRANSPORTATION

The theoretical aspects of the dynamic programming method are generalized as a mathematical method for making managerial decisions in optimization problems. A multi-stage management process based on the Bellman optimality principle in the real economic space is constructed. Functional Bellman equations that are directly adapted to a specific production problem are discussed in detail.

The optimal economic and mathematical model of economic process development is obtained. This allows you to manage the economic process as a whole, to develop effective management decisions with help of which to increase the competitiveness of the enterprise. The algorithm for transportation and storage of materials, which consists of forward stroke, a process of sequentially calculating the objective function and the return, that is, restoring the optimal solution, has been developed. At the last step of the forward stroke, the optimal value of the last variable $x_n^* = x_n(Y)$ and the optimal values of the control variables has been obtained. The economic process of managing the distribution of materials is broken into n stages, the decision is made sequentially at each stage, so a multi-step process has been obtained. The calculated performance metric for this managed system is a goal function that depends on the initial state and management $\bar{X}(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Functional equations have been constructed that are adapted to the problem of the distribution of materials. During the direct course at each step, all possible values of the target function have been calculated by functional equations. Each subsequent value of the objective function depends on the control at this stage and the previous value of the objective function. So, with help a computer, a table of possible conditionally optimal values of the target function and corresponding optimal controls has been constructed. At the final stage of the return stroke, the optimal value of the target function and the last optimal process control have been obtained. At the preliminary stage, depending on the optimal process control at the final stage, the conditionally optimal value of the target function and the preliminary optimal process control are found, then the following preliminary solution has been obtained in the same way. Functional equations, that are adapted to the problem of material distribution, are constructed. According to the results of the forward and backward moves of the algorithm, an optimal economic and mathematical model of material distribution was obtained.

Keywords: dynamic programming method, functional equations, economic-mathematical model, optimal control, distribution of materials, forward algorithm, backward algorithm, goal function.

Постановка проблеми. Для створення конкурентних переваг підприємств у сучасних умовах нестабільного ринкового середовища України виникає необхідність у розробленні та реалізації обґрунтованих заходів у всіх сферах діяльності підприємств. Вибір підприємств-партнерів для сумісного бізнесу, залучення коштів інвесторів у перспективне виробництво та ін. потребують досконалих методів аналізу діяльності підприємств. Розроблення дійових управлінських рішень має ґрунтуватися на аналітичних висновках, що зумовлює актуальність застосування математичних методів прийняття рішень. Відповідно до сучасних загально-наукових уявлень, математичне моделювання – процес науково-дослідний, пошуковий, пізнавальний, що зумовлює синтез використання наукових підходів: системного, логічного, оптимізаційного.

Обґрунтування управлінських рішень у задачах оптимізації виконується за методом динамічного програмування. Динамічне програмування дає змогу замість вихідної багатовимірної задачі розглядати сімейство споріднених задач, які пов'язані рекурентними співвідношеннями, кожне з яких має значно меншу вимірність.

Таким методом розв'язують задачі розподілення інвестицій, розподілення ресурсів, заміни обладнання тощо, але недостатньо розглянуто задачу розподілення матеріалів, хоча практично кожне підприємство перевозить певні матеріали, які необхідно десь розмістити.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблемою застосування методу динамічного програмування в управлінні виробничою діяльністю підприємств займалися вітчизняні та зарубіжні вчені: Р. Беллман [2], А. Протосеня [12], С. Куліш [12], Е. Азбель [1], І.Л. Акулич [1], Н.Ш. Кремер [11], Б.А. Путко [11], І.М. Тришин [11], Ю.Н. Кузнецов [10], В.І. Кузубов [10], А.Б. Волощенко [10] та ін. У роботах указаних авторів розглядаються математичні методи, які використовують в управлінні виробництвом. Багато уваги приділяється методу динамічного програмування. У роботах Беллмана основний акцент спрямований на розроблення теоретичних основ методу, функціональних рівнянь та можливостей їх застосування до розв'язання економічних задач. Необхідність у прийнятті кожного разу вірного рішення під час управління підприємством витікає із самого принципу оптимальності, що був сформульований Беллманом. Цей принцип доводить, що яким би не був стан S -системи в результаті будь-якого числа кроків, на найближчому кроці потрібно вибирати керування так, щоб воно в сукупності з оптимальним керуванням на всіх наступних кроках приводило до оптимального результату на всіх кроках, що залишилися, включаючи даний [6]. У роботах Кремера, Акуліча, Кузнецова, Кузубова, Волощенко та ін. розглянуто можливості застосування методу динамічного програмування до розв'язання задач розподілення інвестицій, розподілення ресурсів, заміни обладнання та ін. Однак недостатньо розглянутими залишилися питання застосування методу динамічного програмування для оптимізації управління розподілом матеріалів по складах. Тому актуальним питанням є розроблення алгоритму розв'язання задачі з практичним напрямом.

Мета статті. Питання оптимізації розподілення матеріалів є своєчасним і актуальним для багатьох підприємств. З огляду на це, актуально розробити алгоритм перевезення та зберігання матеріалів такий, щоб загальні витрати були мінімальні та щоб у першу чергу можна було зберігати найбільш цінні матеріали. На прикладі перевезення контейнерів по складах автори викладають алгоритм розподілення матеріалів, який може бути застосований підприємствами для перевезення необхідних матеріалів, що дасть змогу ефективно управляти економічним процесом у цілому.

Виклад матеріалу дослідження та його основні результати. Метою роботи є розроблення математичної моделі управління процесом перевезення та зберігання матеріалів.

Для досягнення поставленої мети потрібно вирішити такі завдання:

– за методом динамічного програмування побудувати економіко-математичну модель управління процесом розподілення матеріалів;

– функціональні рівняння Беллмана адаптувати до даної виробничої задачі;

– скласти алгоритм оптимального управління процесом перевезення та зберігання матеріалів.

Отримана модель дасть змогу оптимізувати та впорядкувати роботу підприємства з перевезення матеріалів, що дасть певний економічний ефект.

Загальна постановка задачі полягає у такому. Припустимо, що ми маємо певний керований процес, наприклад економічний: процес розподілу коштів між підприємствами, процес використання ресурсів протягом низки років, процес заміни обладнання, процес поповнення запасів, процес перевезення та зберігання матеріалів та ін.

Позначимо S_0 – початковий стан системи. Нехай система перебуває в стані S_0 й є керованою. У результаті управління система переходить зі стану S_0 в стан S^*. Припустимо, що управління можна розбити на n етапів, тоді рішення прийматимемо послідовно на кожному кроці, тобто отримуємо багатокроковий процес.

Позначимо X_k – управління на k-му кроці $(k=1,2,\ldots n)$. Змінні X_k можуть бути числом, точкою в n-вимірному просторі, якісною ознакою. Тоді $\bar{X}(X_1, X_2, \ldots X_n)$ – управління, що переводить систему зі стану S_0 в S^*.

Позначимо S_k – стан системи після k-го кроку. Отримуємо послідовність станів $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_n = S^*$.

Показник ефективності цієї керованої системи – функція цілі Z, яка залежить від початкового стану S_0 і управління $\bar{X}$:

$$Z = \left(S_0, \bar{X}\right) \tag{1}$$

Потрібно знайти таке управління $\bar{X}^*\left(X_1^*, X_2^*, \ldots X_n^*\right)$, за якого функція цілі приймає екстремальне значення [13].

Розв'язання задачі засноване на принципі оптимальності Беллмана. Принцип оптимальності: оптимальна поведінка має таку властивість, що які б не були початковий стан і рішення в початковий момент, наступні рішення повинні становити оптимальну поведінку відносно попереднього рішення [8].

Будуємо багатоетапний процес управління. Отже, поділяємо весь процес управління на n кроків, межі позначимо станами $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_n = S^*$ – кінцевий стан. На кожному кроці вибираємо оптимальне управління по відношенню до попереднього кроку, його називають умовно-оптимальним управлінням. Функція цілі володіє умовою адитивності, тобто характеризує сукупний дохід за n етапів або сукупні витрати за n етапів.

$$F_{опт}(x) = \underset{\min}{\overset{\max}{}} \sum_{k=1}^{n} F_k(x_k) \tag{2}$$

де x – вкладені кошти за n етапів; x_k – кошти, вкладені на k-му етапі, $F_k(x_k)$ – функція цілі на k-му етапі [14].

Під час розв'язання задачі використовують функціональні рівняння Беллмана. Для випадку оптимізації від S_0 до S_n рівняння Беллмана мають такий вигляд [3; 5]:

$$F_k^*(S_k) = \underset{\min}{\overset{\max}{}} \left(G_k(S_k, X_k) + F_{k-1}^*(S_{k-1})\right) \tag{3}$$

де $F_{k-1}^*(S_{k-1})$ – оптимальне значення функції цілі за оптимальної стратегії $(k-1)$ – крокового процесу; $G_k(S_k, X_k)$ – дохід, що отримується під час переходу зі стану S_{k-1} у S_k з управляючим рішенням X_k; $F_k^*(S_k)$ – оптимальне значення функції цілі за оптимальної стратегії k-крокового процесу; $k = 1, 2, \ldots, n$.

Позначимо через x_t шукану величину ресурсу, що вкладається в розвиток виробництва на етапі $k = 1, \ldots, n$. Функцію цілі позначимо $S(y)$. Тоді математичну модель запишемо у вигляді:

$$S(y) = \sum_{t=1}^{n} f_t(x_t) \to \max_{\{x\}},$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_t = Y, \tag{5}$$

$$x_t \geq 0,\ t = 1, \ldots, n.$$

Алгоритм рішення задачі складається з прямого ходу (процесу послідовного обчислення величини $S_k(y)$, $k = 1, \ldots, n$; $0 \le y \le Y$) і зворотного ходу (відновлення оптимального рішення). На останньому кроці прямого ходу отримуємо оптимальне значення останньої змінної $x_n^* = x_n(Y)$ і оптимальні значення змінних управління $x_n^*, \ldots, x_{k+1}^*$. Тоді $x_k^* = x_k\left(y_k^*\right)$, де $y_k^* = y_{k+1}^* - x_{k+1}^*$.

Розглянемо виробничу задачу. Підприємству, яке перевозить контейнери з матеріалами, потрібно розподілити їх по складах. Отже, на залізничну станцію прибуло 10 контейнерів, які необхідно розподілити по чотирьох складах. Ємність i-го складу ν_i контейнерів, витрати на транспортування одного контейнера на цей склад – g_i, а вартість зберігання x контейнерів – $c_i(x)$. Необхідно розподілити всі контейнери, що прибули, по складах, щоб сумарні витрати на транспортування і зберігання були мінімальні. Вихідні дані задачі наведено в табл. 1 і 2.

Таблиця 1

Витрати на транспортування контейнерів і ємності складів

ν_i \ g_i	Склади			
	1	**2**	**3**	**4**
g_i	1	1,3	2	1,2
ν_i	3	4	3	5

Таблиця 2

Вартість зберігання x контейнерів

x	$c_1(x)$	$c_2(x)$	$c_3(x)$	$c_4(x)$
1	1	1,5	0,5	0,5
2	3	2	1	1,5
3	4	2,5	2	2
4	–	3,5	–	2,5
5	–	–	–	2

Для запису математичної постановки задачі введемо функції $h_i(x) = g_i x + +c_i(x)$, $i = 1, \ldots, 4$, які обчислено в табл. 3.

$h_i(x)$ – витрати на транспортування і зберігання x контейнерів.

Таблиця 3

Витрати на транспортування та зберігання x контейнерів

x	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$
1	2	2,8	2,5	1,7
2	5	4,6	5	3,9
3	7	6,4	8	5,6
4	–	8,7	–	7,3
5	–	–	–	8,2

Математична модель має такий вигляд:

$$S(y) = \sum_{i=1}^{4} h_i(x_i) \to \min_{x \in \{0,1,\ldots,\nu\}}, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 10$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots 4$$

Тоді рекурентні співвідношення:

$$S_1(y) = h_1(y),\ y = 0, 1, \ldots, 10,$$

$$S_k(y) = \min_{0 \le x \le \min\{y, \nu_k\}} \left[h_k(x) + S_{k-1}(y - x)\right] \tag{7}$$

$$k = 2, \ldots, 4;\ y = 0, 1, \ldots, 10.$$

Прямий хід. Прямий хід алгоритму містить таке. На кожному кроці за функціональними рівняннями обчислено всі можливі значення функції цілі. Кожне наступне значення функції цілі залежить від управління на даному етапі та попереднього значення функції цілі. У такий спосіб за допомогою комп'ютера побудовано таблицю можливих умовно-оптимальних значень функції цілі та відповідних оптимальних управлінь.

Прочерк у клітці таблиці означає, що допустимого рішення не існує. Умовно-оптимальних рішень (як і оптимальних) може бути кілька. Для отримання одного з оптимальних рішень досить зберігати будь-яке умовно-оптимальне рішення. Значення функції $S_4(y)$ для $y = 0,1,\ldots,9$ обчислювати немає необхідності. Ці значення знадобилися б під час обчислення $S_5(y)$, але в цьому немає необхідності тому що всього чотири склади.

За рівнянням (7) обчислимо значення функції цілі $S_k(y)$ і помістимо в табл. 4 [7].

Прямий хід. $S_1(y) = h_1(y)$, $y = \overline{0,10}$

$S_2(y) = \min\left(h_2(x) + S_1(y-x)\right)$, $y = \overline{0,10}$

$S_3(y) = \min\left(h_3(x) + S_2(y-x)\right)$, $y = \overline{0,10}$.

Для оптимального плану досить обчислити $S_4(10)$.

$S_4(y) = \min\left(h_4(x) + S_3(y-x)\right)$, $y = \overline{1,10}$.

$S_4(10) = \min\left(h_4(x) + S_3(10-x)\right)$

$$S_4(10) = \min\begin{pmatrix} 0 & + & 23,7 \\ 1,7 & + & 20,7 \\ 3,9 & + & 18,2 \\ 5,6 & + & 15,7 \\ 7,3 & + & 13,2 \\ \boxed{8,2} & + & \boxed{10,7} \end{pmatrix} = 18,9 \quad x = 5\,.$$

У результаті прямого ходу заповнюємо табл. 4, в яку поміщено значення $S_k(y)$, а через дріб (/) указано умовно-оптимальні значення, які допоможуть відновити оптимальне рішення на етапі зворотного ходу.

Таблиця 4

Значення функції $S_k(y)$ та умовно-оптимальні рішення

y	$S_1(y)$	$S_2(y)$	$S_3(y)$	$S_4(y)$
0	0	0	0	0
1	**2/1**	2/0; 1	2/0; 1	–
2	5/2	4,6/2	4,5/2	–
3	7/3	7/0	7/0; 2	–
4	–	8,4/3	8,4/0	–
5	–	**10,7/4**	**10,7/0**	–
6	–	13,4/3	13,2/1	–
7	–	15,7/4	15,7/0	–
8	–	–	18,2/1	–
9	–	–	20,7/2	–
10	–	–	23,7/3	**18,9/5**

Отже, у результаті роботи прямого ходу алгоритму знайдено оптимальне значення цільової функції $S^* = S_4(10) = 18,9$ й оптимальне значення останньої змінної $x_4^* = x_4(10) = 5$.

Зворотний хід. Зворотний хід алгоритму містить таке. На кінцевому етапі отримано оптимальне значення функції цілі та останнє оптимальне управління процесом. На попередньому етапі залежно від оптимального управління процесом на кінцевому етапі знайдено умовно-оптимальне значення функції цілі та попереднє оптимальне управління процесом, потім у такий самий спосіб отримано наступне попереднє рішення і т. ін. Процес продовжено до першого етапу і таким чином отримано оптимальну економіко-математичну модель розподілення матеріалів.

Тому що на четвертий склад в оптимальному рішенні треба везти п'ять контейнерів $\left(x_4^* = 5\right)$, то $y_3^* = 10 - 5 = 5$, тобто ще п'ять контейнерів потрібно розподілити по перших трьох складах. Для визначення оптимального значення передостанньої змінної досить звернутися до $S_3(5) = 10,7$ і $x_3^* = 0$ (табл. 4). Отже, на третій склад відправляти контейнери не потрібно. Тобто п'ять контейнерів необхідно відправити на перший і другий склади. Обчислимо $y_2^* = y_3^* - x_3^* = 5 - 0 = 5$. Для визначення оптимального значення другої змінної досить звернутися до $S_2(5) = 10,7$ і $x_2^* = 4$. Тобто на склад два потрібно везти чотири контейнери. Знайдемо $y_1^* = y_2^* - x_2^* = 5 - 4 = 1$. Для визначення оптимального значення першої змінної досить звернутися до $S_1(1)$ маємо умовно-оптимальне значення 2 і $x_1^* = 1$. Тобто на склад один потрібно везти один контейнер. Остаточно маємо: оптимальний вектор задачі $\bar{X}^* = (1,4,0,5)$ та мінімальні витрати $S^* = 18,9$, які пов'язані з перевезенням та зберіганням десяти контейнерів. У табл. 4 позначено значення функції цілі $S_k(y)$, за якими було встановлено оптимальне рішення на етапі зворотного ходу.

Таким чином, рівняння Беллмана адаптовано до проблеми розподілення матеріалів (або контейнерів) по складах і мають вигляд:

$$S_1(y) = h_1(y),\ \ y = 0,1,\ldots,10\,;$$

$$S_k(y) = \min_{0 \le x \le \min\{y, v_k\}}\left[h_k(x) + S_{k-1}(y-x)\right]$$

$$k = 2,\ldots,4\,;\ \ y = 0,1,\ldots,10\,.$$

За цими рівняннями обчислено всі можливі значення функції цілі $S_k(y)$, які вказані в табл. 4. Розроблено прямий та зворотний ходи розв'язання задачі. У результаті роботи прямого ходу алгоритму знайдено оптимальне значення цільової функції $S^* = S_4(10) = 18,9$ і оптимальне значення останньої змінної $x_4^* = x_4(10) = 5$, яке відповідає рівнянню $S_4(10) = \min\left(h_4(5) + S_3(10-5)\right)$. Тобто до четвертого складу вигідно перевезти 5 контейнерів, а ще 5(10 – 5) контейнерів потрібно розподілити між трьома першими складами. Знайдена оптимальна модель управління процесом розподілення матеріалів $\bar{X}^* = (1,4,0,5)$, де $x_3^* = x_3(5) = 0$ відповідає рівнянню $S_3(5) = \min\left(h_3(0) + S_2(5-0)\right)$ і означає, що на третій склад не слід везти контейнери; $x_2^* = x_2(5) = 4$ відповідає рівнянню $S_2(5) = \min\left(h_2(4) + S_1(5-4)\right)$ і означає, що до другого складу слід перевезти 4 контейнери; $x_1^* = x_1(1) = 1$ відповідає рівнянню $S_1(1) = h_1(1)$ і означає, що до першого складу слід перевезти 1 контейнер. Отже, побудовано алгоритм задачі управління розподіленням та зберіганням контейнерів по складах і отримано оптимальну економіко-математичну модель.

Висновки. У роботі узагальнено теоретичні аспекти методу динамічного програмування та побудовано економіко-математичну модель управління процесом розподілення матеріалів. Розроблено багатоетапний процес управління на основі принципу оптимальності Беллмана в реальному економічному просторі. Детально розглянуто функціональні рівняння Беллмана, які безпосередньо адаптовані до задачі розподілення матеріалів.

Розроблено алгоритм оптимального управління процесом перевезення та розміщення матеріалів. Він складається з прямого ходу та зворотного. Економічний процес управління розподіленням матеріалів розбито на n етапів, рішення прийнято послідовно на кожному етапі, тобто отримано багатокроковий процес. Обчислено показник ефективності цієї керованої системи – функція цілі, яка залежить від початкового стану й управління $\bar{X}(x_1, x_2, \dots x_n)$. Побудовано функціональні рівняння, які пристосовані до задачі розподілення матеріалів.

Отримано оптимальну економіко-математичну модель розвитку економічного процесу, яка дає змогу оптимізувати й упорядкувати роботу підприємства з перевезення матеріалів, тобто управляти економічним процесом у цілому.

Практичне значення одержаних результатів полягає у тому, що теоретичні положення роботи доведені до рівня конкретних рекомендацій щодо управління розподіленням матеріалів. Практичне використання запропонованої математичної моделі, а також розробленого алгоритму дасть змогу вирішити проблему забезпечення інформаційно-аналітичної основи для обґрунтування управлінських рішень, спрямованих на підтримку прийнятих умов функціонування вітчизняних підприємств.

Розроблений алгоритм може бути взятий за основу під час розроблення математичних моделей перевезень на інших підприємствах. Це може бути перевезення товарів із цеху на склад, перевезення товарів до магазинів, міжміські перевезення, міжнародні перевезення тощо.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие ; 3-е изд. Санкт-Петербург : Лань, 2011. 352 с.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. Москва : Иностранная литература, 1960. 400 с.
3. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. Москва : Иностранная литература, 1962. 336 с.
4. Беллман Р. Об определении оптимальных траекторий методом динамического программирования. Москва : Иностранная литература, 1965. 338 с.
5. Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования. Москва : Иностранная литература, 1965. 459 с.
6. Білоцерківський О.Б. Математичне моделювання в економіці та менеджменті : текст лекцій. Харків : НТУ «ХПІ», 2018. 90 с.
7. Дрозденко К.А., Котенко А.П. Применение метода динамического программирования в стохастических задачах распределения ресурсов. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*. 2007. 184–185 с.
8. Єфимова Г.О., Рудик О.Г. Методичні вказівки для самостійної роботи по дисципліні «Дослідження операцій» для студентів напрямів підготовки 6.040301 «Прикладна математика» і 6.030502 «Економічна кібернетика». *Динамічне програмування* : методичні рекомендації. Одеса, 2015. 38 с.
9. Єсіна В.О. Методичні вказівки до проведення практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Оптимізаційні метод та моделі» для студентів усіх форм навчання за напрямами підготовки 6.030504 – Економіка підприємства та 6.030509 – Облік і аудит : методичні рекомендації. Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2017. 23 с.
10. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование : учебное пособие ; 2-е изд. Москва : Высшая школа, 1980. 300 с.
11. Исследование операций в экономике : учебник для академического бакалавриата / Н.Ш. Кремер и др. ; под ред. Н.Ш. Кремера ; 3-е изд. Москва : Юрайт, 2019. 438 с.
12. Кулиш С.А., Протосеня А.Г. Математические методы и модели в планировании и управлении горным производством : учебное пособие. Москва : Недра, 1985. 288 с.
13. Норик Л.А., Шевченко А.К. Высшая и прикладная математика : учебное пособие. Харьков : ХНЭУ, 2013. 404 с.
14. Солодовник Г.В. Детермінована модель оптимального розподілу ресурсів. *Молодий вчений*. 2016. № 6. С. 108–111.

REFERENCES:

1. Akylich I.L. (2011). Matematicheskoe programmirovanie v primerah i zadachah: ychebnoe posobie [Mathematical programming in examples and tasks]. Sankt-Peterburg: Izdatel'stvo Lan', 352 p. [in Russian]
2. Bellman R. (1960). Dinamicheskoe programmirovanie [Dynamic programming]. Moskva: Inostrannaja literatyra, 400 p. [in Russian]
3. Bellman R. (1962). Nekotorie voprosi matematicheskoj teorii processov ypravlenija [Some questions of the mathematical theory of control processes]. Moskva: Inostrannaja literatyra, 336 p. [in Russian]
4. Bellman R. (1965). Ob opredelenii optimal'nih traektorij metodom dinamicheskogo programmirovanija [On determination of optimal trajectories by dynamic programming method]. Moskva: Inostrannaja literatyra, 338 p. [in Russian]
5. Bellman R. (1965). Prikladnie zadachi dinamicheskogo programmirovanija [Dynamic programming applications]. Moskva: Inostrannaja literatyra, 459 p. [in Russian]
6. Bilocerkivs'kij O.B. (2018). Matematichne modeluvannja v ekonomici ta menedgmenti: tekst lekcij [Mathematical modeling in economics and management]. Kharkiv: The text of lectures, NTU "KhPI", 90 p. [in Ukrainian]
7. Drozdenko K.A., Kotenko A.P. (2007). Primenenie metoda dinamicheskogo programmirovanija v stohasticheskih zadachah raspredilenija resyrsov [Application of dynamic programming method in stochastic resource allocation problems]. *Vestnik Samarskogo gosydarstvennogo tehnicheskogo yniversiteta. Serija "Fiziko-matematicheskie nayki"*, pp. 184–185. [in Russian]
8. Efimova G.O., Rydik O.G. (2015). Metodichni vkazivki dl'a samostijnoj roboti po discipline "Doslidgennja operacij" (rozdil "Dinamichne programyvannja") [Methodical instructions for independent work in the discipline "Operations Research" (section "Dynamic Programming")]. Odesa, 38 p. [in Ukrainian]
9. Esina V.O. (2017). Metodichni vkazivki do provedennja praktichnih zanjat' ta samostijnoj roboti z disciplini "Optimizacijni metodi ta modeli" [Methodical instructions for conducting practical classes and independent work in the discipline "Optimization method and models"]. Kharkiv, 23 p. [in Ukrainian]
10. Kyznecov U.N., Kyzybov V.I., Voloshenko A.B. (1980). Matematicheskoe programmirovanie: ychebnoe posobie, vtoroe izdanie [Mathematical programming in examples and tasks: tutorial]. Mockva: Visshaja shkola, 300 p. [in Russian]
11. Kremer N.S., Pytko B.A., Trishin I.M., Fridman M.N. (2019). Issledovanie operacij v ekonomike: ychebnik dl'a akademicheskogo bakalavriata [Operations Research in Economics: A Textbook for Academic Baccalaureate]. Moskva: Izdatel'stvo Urajt, 438 p. [in Russian]
12. Kylish S.A., Protosenja A.G. (1985). Matematicheskie metodi i modeli v planirovanii i ypravlenii gornim proizvodstvom: ychebnoe posobie [Mathematical methods and models in the planning and management of mining: tutorial]. Moskva: Nedra, 288 p. [in Russian]
13. Norik L.A., Shevchenko A.K. (2013). Visshaja i prikladnaja matematika: ychebnoe posobie [Higher and applied mathematics: tutorial]. Kharkiv: Izdatel'stvo HNEU, 404 p. [in Ukrainian]
14. Solodovnik G.V. (2016). Determinovana model' optimal'nogo rozpodily resyrsiv [Determined model of optimal resource allocation]. *Molodij vchenij*, no. 6, pp. 108–111. [in Ukrainian]

Стаття надійшла до редакції 13.02.2020.
The article was received 13 February 2020.